Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023. 1. feladatsor**
5.-6. évfolyam

KEVERJÜNK ÉS SZÁMOLJUNK

A matematikában nagyon gyakran találkozunk olyan szöveges feladatokkal, amelyekben a különböző mennyiségek arányán alapulnak. Ezekben a feladatokban a fő célkitűzés megtalálni az egyes mennyiségek arányát ahhoz, hogy a feladatban szereplő adatok közötti összefüggések helyesek legyenek. Az ilyen típusú szöveges feladatok megoldására többféle módszer létezik, ezek közül fogunk néhányat megemlíteni. Azt is kiemelnénk, hogy ezek a feladatok olyan módszerekkel is megoldhatók, amelyek magasabb évfolyamok tananyagában szerepelnek, ezeket az eljárásokat jelen esetben mellőztük. Az alábbiakban kitérünk a különböző anyagok keverésével, töménységével, hőmérsékletével, valamint a folyamatok sebességével kapcsolatos feladatokra.

Mintapéldák

1.) Józsi bácsinak két különböző pálinkája van. Az egyikből egy liter 30 tallérba, a másikból egy liter 48 tallérba kerül.

a) A két pálinkából keveréket készít úgy, hogy az első fajtából 2 litert, a második fajtából pedig 4 litert használ fel. Hány tallérba kerül egy liter ebből a keverékből?

b) Hány litert kell, hogy összekeverjen az egyes fajtákból ahhoz, hogy a végső keverék literenkénti ára 39 tallér legyen?

Megoldás:

a) Az első fajtából 2 litert, a másodikból pedig 4 litert véve 6 liter keverék keletkezik, amelynek ára összesen $2 \cdot 30 + 4 \cdot 48 = 252$ tallér lesz. Ebből következik, hogy egy liter keverék ára $252: 6 = 42$ tallér.
Észrevehetjük, hogy a feladatot úgy is meg lehet oldani, ha a keverékben szereplő mennyiségek arányából indulunk ki. Belátható, hogy a második fajtából kétszer annyit használtunk fel, mint az elsőből. Vegyük a két pálinka árának különbségét, amely $48 - 30 = 18$. Mivel a második fajta pálinkából kétszer annyit használtunk fel, mint az elsőből, ezért a keverék ára kétszer távolabb lesz az első pálinka árától, mint a másodiktól (a keverék ára természetesen a két különböző fajta pálinka ára között helyezkedik el). Tehát a keverék ára 12 tallérral drágább lesz az első pálinka áránál (ezáltal 6 tallérral olcsóbb lesz, mint a második pálinka), vagyis a keverék ára $30 + 12 = 42$ (illetve $48 - 6 = 42$). Ezt az ötletet a következő alpontban is felhasználjuk.

b) A keverék literenkénti 46 talléros ára nyolcszor távolabb van az első, mint a második pálinka árától. (16 ill. 2 tallér) Ezért a keverék elkészítéséhez a második pálinkából nyolcszor akkora mennyiséget kell vegyünk, mint az első pálinkából. Tehát például 1 liter az első és 8 liter a második pálinkából megfelelő választás lesz. Viszont az is belátható, hogy ennek a feladatnak végtelen sok megoldása van, mivel az említett számok többszörösei is megfelelnek, például 2 liter az első, illetve 16 liter a második pálinkából.

2.) Józsi bácsi takarmánykeveréket készít. Egy mázsa búza 400 tallérba, egy mázsa kukorica pedig 600 tallérba kerül. Hány mázsa búzát kell összekeverni 42 mázsa kukoricával, ahhoz hogy egy mázsa takarmánykeverék ára 550 tallér legyen?

Megoldás:

Belátható, hogy a takarmánykeverék és búza árának különbsége $550 - 400 = 150$, ez háromszorosa a kukorica, illetve a takarmánykeverék ára közötti különbségnek. Tehát a keverék előállítása során kukoricából háromszor annyit használunk fel, mint búzából. Így a felhasznált búza mennyisége $42 : 3 = 14$.

3.) Józsi bácsi a pipájába a dohányt háromféle dohányfajtából keveri. A Füstölnék dohányból 1 kg 5 tallérba, a Szippantanék dohányból 1 kg 8 tallérba, míg a Pipáznék dohányból 1 kg 12 tallérba kerül. A dohánykeverék készítésénél hogyan adagolja az összetevőket ahhoz, hogy 1 kg keverék 6 tallérba kerüljön és minden fajta dohányból kerüljön a keverékbe? Keressünk több megoldást!

Megoldás:

Először készítsünk keveréket a legolcsóbb és legdrágább dohányból. Mivel a Pipáznék dohány árának eltérése a keverék árától hatszor több, mint a Füstölnék dohányé, ezért az utóbbiból hatszor annyit kell, hogy adagoljunk a keverékhez. Tehát 1 kg Pipáznék és 6 kg Füstölnék dohányból 7 kg keverék lesz. Hasonlóan gondolkodva beláthatjuk, hogy 2 kg Füstölnék és 1 kg Szippantanék dohányból 3 kg keverék lesz. Összegezve *1 kg Pipáznék, 8 kg Füstölnék és 1 kg Szippantanék dohányból 10 kg keverék lesz*.
Könnyen beláthatjuk, hogy az előző számításainkban a páronként vett arányok többszöröseivel is számolhatunk. Például 2 kg Pipáznék és 12 kg Füstölnék dohányból 14 kg keverék, míg 8 kg Füstölnék és 4 kg Szippantanék dohányból 12 kg keverék lesz. Ezeket összegezve *2 kg Pipáznék, 20 kg Füstölnék és 4 kg Szippantanék dohányból 26 kg keverék lesz*. Ha az előbbi mennyiségeket megfelezzük, akkor *1 kg Pipáznék, 10 kg Füstölnék és 2 kg Szippantanék dohányból 13 kg keverék lesz*.
A fentiek mintájára végtelen sok különböző megoldás létezik, ezekben a keverékekben nem minden esetben egyezik meg az egyes összetevők aránya.

4.) Józsi bácsi zabot vásárolt a lova számára. Kiszámolta, hogy ha a ló naponta 15 kg-ot eszik, akkor a készlet 4 nappal később fogy el, mintha naponta 20 kg-ot enne. Hány kg zabot vásárolt Józsi bácsi?

Megoldás:

Elsőként tekintsük azt az esetet, amikor a ló naponta 15 kg-ot eszik és a készlet 4 nappal később fogy el. Ebben az esetben az utolsó négy nap fogyasztása $15 \cdot 4 = 60$ kg. Ha a ló naponta 20 kg-ot eszik, akkor az első esethez képest naponta 5 kg-mal több zab fogy el. Így a számított 60 kg-os felesleg (az első esetben az utolsó négy nap fogyasztása) $60 : 5 = 12$ napi „többletfogyasztáshoz” elegendő. Tehát a készlet 12 napra elegendő, ha a ló naponta 20 kg-ot eszik, illetve 16 napra, ha a napi fogyasztás 15 kg. Mindkét esetben számolva Józsi bácsi 240 kg zabot vásárolt.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Gyakorló feladatok

1.) Józsi bácsi 25 fokos „asszonypálinkát” összekevert 6 dl 50 fokos „székelypálinkával”, így a kevert pálinka 30 fokos lett. Hány dl kevert pálinkát kapott?

2.) Józsi bácsi fürdővizet készít 50°C-os meleg vízből és 23°C-os hideg vízből. Így 180 liter 32°C fürdővizet állít elő. Hány liter meleg, illetve hideg vizet kevert össze?

3.) Józsi bácsi szekérrel a vásárba megy. A falutól a vásárig 6 km/h sebességgel, visszafelé pedig 4 km/h sebességgel halad. Az oda-vissza út összesen 15 óra volt. Milyen távol van a falu a vásár színhelyétől?

4.) Józsi bácsi Kárittyonban a pályaudvaron így morfondírozik: „Ha a vonat 54 km/h sebességgel haladna, akkor a menetrendhez képest fél órával hamarabb érkezne Kukutyinba. Ha viszont a vonat sebessége 36 km/h lenne, akkor másfél órát késne. Mekkora kell, hogy legyen a vonat sebessége ahhoz, hogy pontosan érkezzen, és mekkora a két helység közötti távolság?

Kitűzött feladatok

1.) Józsi bácsi a piacon kétfajta vajat árul. Egy kg vaj az első fajtából 10 tallérba, a második fajtából 6 tallérba kerül. Egy vásárló 120 dkg olyan vajat kér, amelynek kilogrammonkénti ára 7 tallér. Mennyi vajat használ fel Józsi bácsi a keveréshez az egyes fajtákból külön-külön?

2.) Józsi bácsi disznókat és kecskéket vásárolt. Egy disznó ára 80 tallér, egy kecske ára pedig 20 tallér. A vásárlás után kiszámította, hogy egy állatért átlagosan 35 tallért fizetett és az állatok között 69 kecske volt. Hány disznót vásárolt Józsi bácsi?

3.) Józsi bácsi a disznóknak moslékot készít. Összeönt 15 liter 20°C-os és 45 liter 44°C-os vizet. Határozzuk meg az elkevert víz hőmérsékletét!

4.) Józsi bácsi a családi birtokot traktorral szántja föl. Kiszámította, hogy minden nap azonos területet szántva föl a tervek szerint 20 nap alatt végezne. Ha viszont naponta 3 hektárral többet szántana, akkor 15 nap alatt végezne. Hány hektár a családi birtok területe?

Beküldési határidő: **2022.11.19.**
Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör **2022/2023. 1. feladatsor**
7.-8. évfolyam

KOMBINATORIKA

A kombinatorika általában a véges halmazokra vonatkozó rendezési és leszámlálási feladatokkal foglalkozik. Az elemi kombinatorika legtöbb esetben a következő két kérdés egyikére keresi a választ:

1.) n elem hány különböző módon rendezhető sorba?
2.) n elemből hányféleképpen lehet k darabot kiválasztani?

Mintapéldák

1.) Három ló, Tornádó (T), Szélvész (S) és Villám (V) versenyez. Hány különböző végeredmény lehet, ha holtverseny is előfordulhat?

Megoldás:

Rendezzük a lehetőségeket a holtversenyek szerint!
Hármas holtverseny az első helyen: 1 lehetőség.
Kettes holtverseny lehet
- az 1. helyen, ekkor T vagy S vagy V a második: 3 lehetőség;
- vagy a 2. helyen, ekkor T vagy S vagy V az első: 3 lehetőség.

Nincs holtverseny. Ekkor a célba érkezés lehetséges sorrendjei: $3\cdot2\cdot1 = 6$ lehetőség. Összesen $1 + 3 + 3 + 6 = 13$-féleképpen érhetnek célba a lovak.

2.) Egy 10 cm élű fakockát feketére festettünk, majd az oldallapokkal párhuzamos vágásokkal 1 cm élű kockákra daraboltuk. Hány olyan kis kocka keletkezett, melynek legalább egyik oldala fekete?

Megoldás:

A kockát $10\cdot10\cdot10 = 1000$ db kis kockára daraboltuk. Csak a „belül” levőket nem színeztük, ezek száma $8\cdot8\cdot8 = 512$, így azon kockák száma, melyeknek legalább egy oldala fekete $1000 – 512 = 488$.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

3.) Egy teremben öt lámpa van. Mindegyiket önállóan lehet felkapcsolni. Hányféleképpen éghetnek a lámpák, ha legalább egynek égnie kell?

Megoldás:

Egy lámpa két állapotát (ég vagy nem ég) jelölje 1, illetve 0. Ily módon egy ötelemű 0-1 sorozat megadja, hogy mely lámpák világítanak, melyek nem. A sorozatok száma $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.
Mivel legalább egy lámpának égnie kell, ezért a 00000 sorozatot, amikor egyik lámpa sem világít, nem kell számolnunk. Tehát a lehetőségek száma $32 - 1 = 31$.

4.) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben szerepel a 0 számjegy?

Megoldás:

A vizsgálni kívánt „jó" számok helyett inkább a „rosszakat" számoljuk meg. Ezt a módszert KOMPLEMENTER módszernek nevezzük. Négyjegyű pozitív egész szám 9000 db van. ($9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$) A 0 számjegyet nem tartalmazó négyjegyű szám minden helyiértékére 9-féle számjegy írható, így ezek száma $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$. Így a 0-át tartalmazó négyjegyű számokból $9000 - 6561 = 2439$ van.

Gyakorló feladatok

1.) Hány olyan négyjegyű szám van, melynek jegyei között az 1 és 2 számjegyek közül legalább az egyik szerepel?

2.) Vendégségbe érkezik András, Béla, Csaba, Dénes és Emil. Az ajtó előtt toporognak azért, hogy eldöntsék, hogy milyen sorrendben lépjenek be, ha Emil mindenképpen közvetlenül Dénes után akar belépni. Hányféle sorrendben léphetnek be az ajtón, ha egyszerre csak egy ember tud belépni?

3.) Hány olyan szám van az első 2022 pozitív egész között, amelyik a 3, 4 és 5 számok közül legfeljebb kettőnek a többszöröse?

4.) Hányféle, a magyar zászlóhoz hasonló (azaz három különböző színből álló), három sávos zászlót lehet készíteni öt színből, ha minden szín legfeljebb egyszer fordulhat elő?

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre

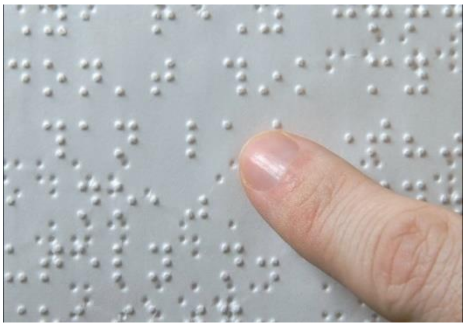
Kitűzött feladatok

1.) Hány olyan négyjegyű szám van, amelyben van ismétlődő számjegy (pl. 2213, 4142, 1100)?

2.) Hány olyan háromjegyű szám van, melyben a számjegyek csökkenő sorrendben követik egymást?

3.) Hány 1-es számjegyet használunk fel, amikor 1-től 999-ig leírjuk az egész számokat?

4.) A vakok részére készített írás a következőképpen készül. Kartonpapírra előrenyomott téglalaphálózat egyes téglalapjaiba lyukakat szúrnak. A lyukak száma 1-től 6-ig terjedhet, mégpedig úgy, hogy minden téglalapban, egymás alatti 3-szor 2 hely megfelelő pontjainak kiszúrásával. Az így kapott jeleket a vakok ujjaikkal kitapintva „olvassák”. Hányféle jel készülhet így? Írd le a neved Braille-írással!



Beküldési határidő: **2022.11.19.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre