



## Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium

2600 Vác, Németh László u. 4- 6.

☎: 27- 317 - 077

☎/fax: 27- 315 - 093

WEB: <http://boronkay.vac.hu> e-mail: [boronkay@vac.hu](mailto:boronkay@vac.hu)



*Levelező Matematika Szakkör*

*2023/2024. 4. feladatsor*

*5.-6. évfolyam*

### *A logika tudománya*

A matematikai logika a matematikának egy nagyon érdekes, ugyanakkor bizonyos esetekben indokolatlanul elhanyagolt területe. Ha valaki a matematikára gondol, akkor azonnal számok és képletek jelennek meg előtte. Figyelmen kívül marad az a tény, hogy a matematika valójában egy olyan tudomány, amely nem elsősorban a számolási készségeket, hanem a gondolkodást fejleszti. Érvényben van az a vélemény, hogy aki nem képes gyorsan fejben számolni lehet még nagy matematikus, viszont ha nem gondolkodik, akkor soha nem fogja megérteni ezt a tudományt. A matematikai logika elsősorban a gondolkodást fejleszti, mellesleg a logikai feladatok sokszor érdekesebbek tudnak lenni a képleteken és számolásokon alapuló feladatoknál. A következőkben egy kis ízelítőt nyújtunk a matematikának ebből a nagyszerű és érdekes fejezetéből.

#### Mintapéldák

- 1) Andi, Bea, Csilla és Kinga futóversenyen vett részt. A verseny után a következőképpen nyilatkoztak:

Andi: *Nem lettem sem első, sem utolsó.*

Bea: *Nem lettem első.*

Csilla: *Első lettem.*

Kinga: *Én lettem az utolsó.*

Állapítsd meg, hogy ki hazudott, ki lett az első, és ki az utolsó, ha tudjuk, hogy pontosan hárman mondtak igazat és egyikük hazudott!

#### Megoldás:

Ha Csilla hazudik, akkor a többiek igazat mondanak, így senki sem lehetne az első. Következik, hogy **Csilla igazat mond, így ő lett az első.** Viszont az is kiderül, hogy *Bea is igazat mond*, mivel ő nem lett első. Ha Andi hazudik, akkor ő lett az utolsó (mivel első nem lehet). Viszont ebben az esetben Kinga igazat mond, így ő is utolsó lett, ami ellentmondás. Tehát *Andi is igazat mond.* Tehát **Kinga hazudik, így Bea az utolsó.** (Azt nem tudjuk meg, hogy ki lett a harmadik, ill. negyedik.)

A feladatsort összeállította:

Dr. Fülöp Zsolt

- 2) Egy dobozban fekete, piros és zöld golyók vannak. Becsukott szemmel legalább:
- a) 45 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kihúzottak között legyen fekete színű;
  - b) 34 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kihúzottak között legyen zöld színű;
  - c) 42 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kihúzottak között legyen piros színű;
- Határozzuk meg hány fekete, piros, illetve zöld golyó van a dobozban külön-külön?

Megoldás:

Mivel 45 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kihúzottak között legyen fekete színű, ezért a piros és a zöld golyók összege 44.

Mivel 34 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kihúzottak között legyen zöld színű, ezért a piros és a fekete golyók összege 33.

Mivel 42 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kihúzottak között legyen piros színű, ezért a fekete és a zöld golyók összege 41.

Tehát felírhatjuk a következő összefüggéseket:

$$\text{piros golyók száma} + \text{zöld golyók száma} = 44$$

$$\text{piros golyók száma} + \text{fekete golyók száma} = 33$$

$$\text{fekete golyók száma} + \text{zöld golyók száma} = 41$$

A fenti összefüggéseket összeadva adódik, hogy a piros, zöld, illetve fekete golyók számának a kétszerese  $44 + 33 + 41 = 118$ -cal egyenlő, tehát

$$\text{piros golyók száma} + \text{zöld golyók száma} + \text{fekete golyók száma} = 59$$

Következik, hogy:

$$\text{piros golyók száma} = 59 - 41 = 18$$

$$\text{zöld golyók száma} = 59 - 33 = 26$$

$$\text{fekete golyók száma} = 59 - 44 = 15$$

- 3) Mint köztudott, Erdélyben medvék, emberek és vámpírok laknak. Az egészséges vámpírok mindig hazudnak, az egészséges emberek mindig igazat mondanak. Viszont az emberek és a vámpírok között örültek is akadnak, ezeknek kényszerképzeteik vannak: az örült emberek hazudnak, míg az örült vámpírok igazat mondanak. Jóska és Pista testvérek, egyik közülük vámpír, a másik nem, Jóska az idősebb. A következőket mondják:

Jóska: *Én ember vagyok.*

Pista: *Én ember vagyok.*

Jóska: *Az öcsém egészséges.*

Melyikük a vámpír?

Megoldás:

Ha egy erdélyi azt mondja, hogy ő ember, akkor egészséges (mivel vagy igazat mond és akkor egészséges ember, vagy hazudik és akkor egészséges vámpír). Jóska és Pista mindketten embereknek vallották magukat, tehát mindketten egészségesek. Ezért Jóska igazat állít, mivel azt mondja, hogy az öccse egészséges. Ebből következik, hogy Jóska egészséges ember, Pista pedig egészséges vámpír. **Tehát Pista a vámpír.**

- 4) Józsi bácsi falujában kétféle típusú ember fordul elő, minden lakos vagy nappali, vagy éjszakai típusú. A nappali lakosokra jellemző, hogy minden, amit ébren gondolnak, az igaz, és minden, amit álmukban gondolnak, az hamis. Az éjszakai lakosok ennek az ellentétei, vagyis minden, amit álmukban gondolnak, az igaz, és minden, amit ébren gondolnak, az hamis. Józsi bácsi egyszer azt gondolta, hogy ő és a felesége mindketten éjszakai típusúak. Ugyanakkor a felesége azt hitte, hogy ők nem mind a ketten éjszakai típusúak. Amikor ezt történt, egyikük ébren volt, a másik pedig aludt. Melyikük volt ébren?

Megoldás:

Ketten ellentétes tényeket gondolnak úgy, hogy egyikük ébren van, a másik pedig alszik. Ebből következik, hogy ők vagy mindketten nappali, vagy mindketten éjszakai típusúak. Mivel abban az esetben, ha különböző típusúak lennének, a gondolataik csak akkor lennének ellentétesek, ha mindketten alszanak, vagy mindketten ébren vannak. Tehát elsőként tegyük fel, hogy mindketten éjszakai típusúak. Ekkor Józsi bácsinak van igaza, és mivel éjszakai típusú, ezért biztosan aludt, a felesége pedig ébren volt (és ezért hamisat gondolt). Most pedig tegyük fel, hogy mindketten nappali típusúak. Ekkor Józsi bácsi hamisan gondolja azt, hogy mindketten éjszakai típusúak. Mivel ő nappali típusú és gondolata hamis, ezért aludnia kellett, amikor ezt gondolta. Könnyen belátható, hogy a felesége viszont ébren volt és igazat gondolt. Tehát akár mindketten nappali, akár mindketten éjszakai típusúak, **Józsi bácsi aludt, a felesége pedig ébren volt.**

**Gyakorló feladatok**

- 1) Négy ember megszállt a nekeresdi fogadóban és egy üveg pálinkát vásároltak. Másnap reggelre a pálinka eltűnt. A négy ember a következőképpen vélekedett:  
Pista bácsi: *Józsi volt.*  
Gyuri bácsi: *Nem én voltam.*  
Józsi bácsi: *János volt.*  
János bácsi: *Józsi nem mond igazat.*  
Ki itta meg a pálinkát, ha négyük közül pontosan egy ember hazudott?
- 2) Pista bácsit mindenki a falu bolondjának tartja, mivel egyszer azt gondolta, hogy ő és a felesége mindketten éjszakai típusúak, és ugyanakkor azt is gondolta, hogy ő nem éjszakai típusú. Hogyan lehetséges ez? Ébren volt a Pista bácsi vagy aludt, amikor ez történt? Éjszakai vagy nappali típusú a Pista bácsi? Milyen típusú a felesége?
- 3) Egy társaságban csak Kelekótyák és Bolondok vannak. A Kelekótyák csak olyan kérdéseket tesznek fel, amelyekre a helyes válasz *Igen*, míg a Bolondok olyanokat, amelyekre a helyes válasz *Nem*. Ebben a társaságban Csaba a következő kérdést tette fel Bélának: *Igaz, hogy legalább az egyikünk Bolond?* Milyen típusú ember Csaba, illetve Béla?
- 4) Erdélyben az embereknek tilos a vámpírokkal összeházasodni, ezért egy erdélyi házaspárban vagy mindketten emberek, vagy mindketten vámpírok. Természetesen egy házaspár esetében

az elmeállapotuk különböző lehet. Egyszer egy házaspár, Pista bácsi és Juliska néni, a következőket állították magukról:

Pista bácsi: Legalább egyikünk örült.

Juliska néni: Ez nem igaz!

Pista bácsi: Mindketten emberek vagyunk.

Ők emberek vagy vámpírok? Melyiküknek milyen az elmeállapota?

### Kitűzött feladatok

- 1) Valaki eldugta Vidor sapkáját. A törpék tudták, hogy Szundi, Kuka vagy Hapci volt a tettes. Összegyültek és kifaggatták a gyanúsítottakat. A következők hangzottak el:  
Szundi: *Hapci ártatlan.*  
Hapci: *Kuka ártatlan.*  
Kuka vallomását csak Tudor hallotta.  
Tudor tudta ki a bűnös, de csak annyit árult el a többieknek, hogy a bűnös igazat mondott, míg a két ártatlan hazudott. Ki volt a tettes?
- 2) Káposztásbergenyében a művelődési ház kulcsát szigorúan őrzik. A megtévesztés kedvéért három láda valamelyikében helyezték el, ezeket a ládákat lakattal zárták le. A ládákat a következő feliratokkal látták el:  
Első láda: *A kulcs nem ebben van. A kulcs készítője Nekeresden lakik.*  
Második láda: *A kulcs nem az első ládában van. A kulcs készítője Kukutyinban lakik.*  
Harmadik láda: *A kulcs nem ebben van. A kulcs a második ládában van.*  
Annyit lehet tudni, hogy mindegyik ládán legalább az egyik állítás igaz. Melyik ládában van a művelődési ház kulcsa?
- 3) Egy országos táborozás öt résztvevője a következőket állítja:  
Antal: *Dénes bajai. Én Pécsről jöttem.*  
Béla: *Pécsi vagyok. Csaba szegedi.*  
Csaba: *Én jöttem Pécsről. Dénes miskolci.*  
Dénes: *Bajai vagyok. Endre győri.*  
Endre: *Győri vagyok. Antal miskolci.*  
Ki hová való, ha mindegyiküknek csak az egyik állítása igaz?
- 4) A faluban János bácsi és a felesége ellentétes típusúak (vagyis az egyik nappali, a másik éjszakai típusú). Egyszer a feleség azt gondolta, hogy vagy mindketten alszanak, vagy mindketten ébren vannak. Ugyanakkor János bácsi azt gondolta, hogy nem alszanak mindketten, de nincs is ébren mind a kettőjük. Melyiküknek volt igaza?

Beküldési határidő: **2024.03.10.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ  
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:  
Dr. Fülöp Zsolt



### Szögszámítási feladatok

Az utolsó fordulóban, a geometriában általánosan ismert tételeket fogjuk használni:

- háromszög belső szögeinek összege  $180^\circ$ ,
- szimmetrikus háromszög alapon fekvő szögei egyenlők,
- derékszögű háromszög két hegyesszögének összege  $90^\circ$ ,
- nevezetes szögpárok tételei (párhuzamos szárú szögek, mint egyállású, váltószögek, társszögek).
- egy szabályos háromszöget a szimmetriatengelye két *félszabályos* háromszögre bont.
- egy derékszögű háromszögben akkor és csakis akkor kétszer akkora a legnagyobb oldal a legkisebbnek, ha szögei  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  és  $90^\circ$ .

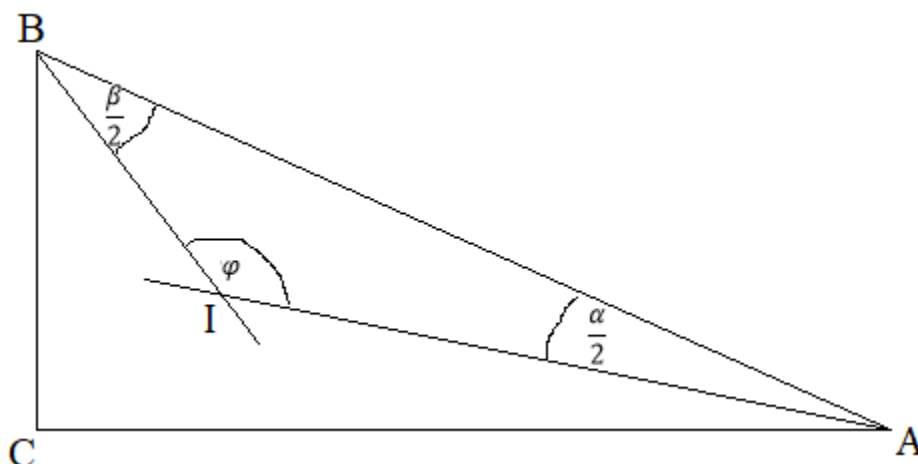
Egy utolsó izgalmas kaland az idei tanévi verseny utolsó fordulójában. Jó munkát, sok sikert!

#### Mintapéldák

- 1) Mekkora szöget zárnak be egy derékszögű háromszög két hegyesszögének szögfelezői?

Megoldás:

Az ABC C-ben derékszögű háromszög két hegyesszögének szögfelezői I-ben metszik egymást. Az AIB háromszögben  $\varphi = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - 45^\circ = \mathbf{135^\circ}$ . (lásd rajz)



- 2) Mekkora az ABC háromszög szögei, ha két magassága legalább akkora, mint a hozzá tartozó alap?

Megoldás:

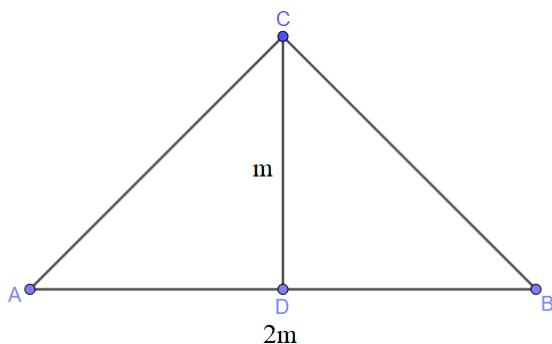
A feltétel szerint:  $m_a \geq a$  és  $m_b \geq b$ . Az  $a \geq m_b$  és  $b \geq m_a$  egyenlőtlenségek mindig igazak, így felírhatjuk, hogy  $a \geq m_b \geq b \geq m_a \geq a$ . Itt minden egyenlőtlenségben egyenlőség kell álljon, mert másképp

$a > a$  lenne. Az  $a = m_b = b = m_a = a$  egyenlőségekből következik, hogy a háromszög derékszögű és egyenlő szárú, szögei:  **$45^\circ$ ,  $45^\circ$  és  $90^\circ$** .

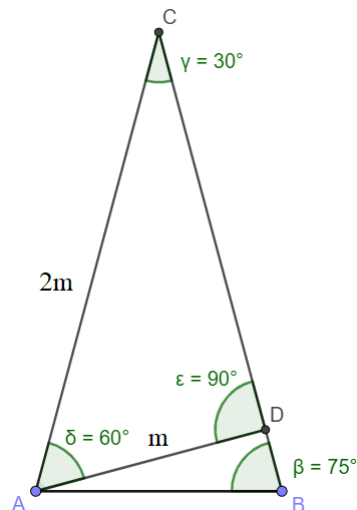
- 3) Mekkora lehetnek annak a tükrös háromszögnek a szögei, amelynek az egyik oldala kétszerese a hozzá tartozó magasságnak?

Megoldás:

Ha az alap kétszerese a hozzá tartozó magasságnak, akkor ez a magasság a háromszöget két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja, így a háromszög szögei:  **$45^\circ$ ,  $45^\circ$  és  $90^\circ$** .



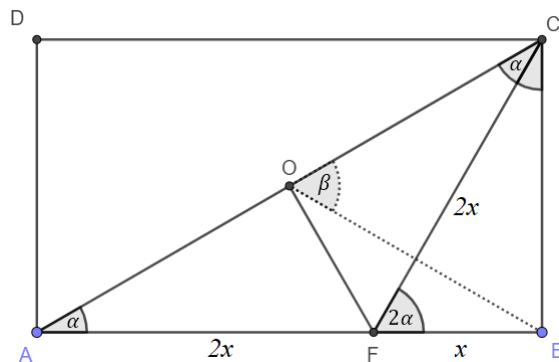
Ha a szár kétszerese a hozzá tartozó magasságnak, akkor a szárszög  $30^\circ$ -os, mivel ekkor egy félszabályos háromszöget kapunk. A háromszög szögei:  **$75^\circ$ ,  $75^\circ$  és  $30^\circ$** . (lásd rajz)



- 4) Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalt 1:2 arányban osztja. Mekkora a két átló által bezárt szög?

Megoldás:

$AF = FC$ , hiszen  $OF$  az  $AC$  felezőmerőlegese. Jelöljük a  $CAF$  és  $ACF$  szöget egyaránt  $\alpha$ -val. Az  $AFC$  háromszög  $F$ -nél levő külső szöge  $2\alpha$ . Az  $FBC$  derékszögű háromszög egyik befogójának és az átfogónak az aránya 1:2, ezért ő egy félszabályos háromszög, ezért  $2\alpha = 60^\circ$  és így  $\alpha = 30^\circ$ . Az  $ABO$  egyenlő szárú háromszög  $O$ -nál levő külső szöge - az átlók szöge -  $\beta = 2\alpha$ , azaz  **$60^\circ$** .



A feladatsort összeállította:  
Merényi Imre

### Gyakorló feladatok

- 1) Egyenlő szárú háromszöget egyik szögének szögfelezője két egyenlő szárú háromszögre bontja. Mekkora lehetnek a háromszög szögei?
- 2) Egy háromszög legnagyobb oldalának hossza kétszerese a legkisebb oldal hosszának, és a legnagyobb oldallal szemközti szög háromszorosa a legkisebb oldallal szemközti szögnek. Hány fokos a háromszög legkisebb szöge?
- 3) Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 5-szöröse a másik hegyesszögének, a háromszög átfogója 40 cm. Számítsuk ki a háromszög területét!
- 4) Egy téglalap átlójának felező merőlegese a hosszabb oldalából a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz le. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

### Kitűzött feladatok

- 1) Egy húrtrapézt az egyik átlója két egyenlő szárú háromszögre bont. Mekkora a trapéz szögei?
- 2) Az ABC hegyesszögű háromszögben  $AB = BC$ , és a háromszög magasságpontja M. Mekkora a háromszög szögei, ha  $MB = AC$  ?
- 3) Bizonyítsd be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge  $15^\circ$ , akkor az átfogó négyszerese az átfogóhoz tartozó magasságának!
- 4) Egy szimmetrikus trapéz hosszabbik alapja kétszerese a rövidebb alapnak. Tudjuk még, hogy a trapéz átlója felezi a trapéz hegyesszögét. Mekkora a trapéz szögei?

Beküldési határidő: **2024.03.10.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ  
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.