Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium

2600 Vác, Németh László u. 4- 6.

☎: 27- 317 - 077 *☎/fax: 27- 315 - 093*

WEB: *http://boronkay.vac.hu* ***e-mail:*** *boronkay@vac.hu*

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022.***

DÖNTŐ

5. OSZTÁLY

1) Pista bácsi birkákat vásárol. Birkaböszörményben 34 birkát vásárolt, ezeknek darabjáért 450 tallért fizetett. Kecskelakon vásárolt még 20 birkát. A két vásárlás után kiszámolta, hogy egy birka átlagosan 420 tallérba került. Mennyibe került egy birka Kecskelakon?

Megoldás:

A két vásárlás után egy birka átlagosan 420 tallérba került, tehát Pista bácsi a $34 + 20 = 54$ birkáért összesen $54 \cdot 420 = 22680$ tallért fizetett. A Birkaböszörményben vásárolt 34 birka összesen $34 \cdot 450 = 15300$ tallérba került. Így **Kecskelakon egy birka ára** $(22680 - 15300) : 20 = \mathbf{369}$ **tallér volt.**

2) 5 tyúk 8 nap alatt 120 tojást tojik. Hány tojást tojik 10 tyúk 12 nap alatt?

Megoldás:

Ha 5 tyúk 8 nap alatt 120 tojást tojik, akkor 10 tyúk 8 nap alatt kétszer annyi, azaz 240 tojást tojik. Tehát 10 tyúk 4 nap alatt az előzőhöz képest fele annyi, tehát 120 tojást tojna. **Így 10 tyúk 8 nap alatt** az előzőhöz képest $12 : 4 = 3$ -szor annyi tojást, vagyis $120 \cdot 3 = \mathbf{360}$ **tojást tojik.**

3) Hány olyan pozitív háromjegyű szám van, amely egyszerre 3-mal, 4-gyel és 5-tel is osztható?

Megoldás:

Összesen 900 háromjegyű szám van. 60-nak a többszörösei azok a számok, amelyek 3-mal, 4-gyel és 5-tel is oszthatók. Mivel a háromjegyű számok körében a 60 többszöröseinek száma $900 : 60 = 15$, ezért **15 olyan szám van, amely 3-mal, 4-gyel és 5-tel is osztható.** Ezek felsorolva a következők: 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600, 660, 720, 780, 840, 900, 960.

4) Józsi bácsitól megkérdezték, hogy hány lova van. Józsi bácsi ezt válaszolta. „Ha lovaim számának egynegyedét hozzáadod az egyharmadához, akkor tízzel többet kapsz a számuk felénél." Hány lova van Józsi bácsinak?

Megoldás:

A lovak számának $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$ része 10-zel több, mint az $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$ része. Tehát a lovak számának $\frac{1}{12}$ része 10-zel egyenlő. Ebből következik, hogy **Józsi bácsinak** $12\cdot 10=\mathbf{120}$ **lova van.**

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2021/2022.**

DÖNTŐ

6. OSZTÁLY

1) András, Béla és Csaba egy matematika versenyen vettek részt. András kétszer annyi pontot szerzett, mint Csaba. Béla 4 ponttal többet szerzett, mint András. A három versenyző pontszámának átlaga 78 pont volt. Hány pontot szerzett a három versenyző külön-külön?

   Megoldás:

   A három versenyző pontszámának átlaga 78 pont volt, tehát az általuk szerzett pontok összege $78 \cdot 3 = 234$. Szakaszos ábrázolással, ahol Csaba pontszámai jelentenek egy szakaszt, könnyen belátható, hogy **Csaba** $(234 - 4): 5 = \mathbf{46}$ **pontot** szerzett. **András** kétszer annyit, vagyis $2 \cdot 46 = \mathbf{92}$ **pontot** szerzett. A **Béla pontszáma** az Andrásénál 4-gyel több, vagyis $92 + 4 = \mathbf{96}$ **pont volt.**

2) Pista bácsi így morfondírozik: „Ha minden lovamnak két kg zabot adnék, akkor 13 kg zab megmaradna. Ugyanakkor 10 kg zab hiányzik ahhoz, hogy minden lovamnak 3 kg zabot adjak." Hány lova van Pista bácsinak?

   Megoldás:

   Miután Pista bácsi minden lónak két kg zabot ad, a megmaradt 13 kg-ot elkezdi szétosztani a lovak között úgy, hogy minden lónak még egy kg zabot ad. Így 13 ló kapott 3 kg zabot. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy 10 kg zab hiányzik ahhoz, hogy minden lónak 3 kg zabot adjon, tehát 10 olyan ló van, amely csak két kg zabot kapott. Következik, hogy **Pista bácsinak** 13 + 10 = **23 lova van.**

3) Hány olyan 500-nál kisebb pozitív egész szám van, amely osztható 3-mal és 4-gyel, de nem osztható 5-tel?

   Megoldás:

   A 3-mal és 4-gyel osztható számok a 12 többszörösei, és mivel 500:12=41 2/3, ezért 41 ilyen 500-nál kisebb pozitív egész szám van. A 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztható számok a 60 többszörösei, és mivel 500:60=8 1/3, ezért 8 ilyen 500-nál kisebb pozitív egész szám van. Következik, hogy 41 – 8 = **33 olyan 500-nál kisebb pozitív egész szám van, amely osztható 3-mal és 4-gyel, de nem osztható 5-tel.**

4) Az A, B és C városok a térképen egy egyenes vonal mentén helyezkednek el úgy, hogy a B város az A és C városok között található. Egy térkép méretaránya $1:200000$. Ezen a térképen az A és B városok távolsága 32 cm. Az A és C városok távolsága 136 km. Egy másik térkép méretaránya $1:600000$. Hány cm ezen a térképen a B és C városok távolsága?

Megoldás:

Az 1:200000 méretarányú térképen 1 cm-nek a valóságban 2 km felel meg. Így az A és B városok távolsága 32·2 = 64 km. Mivel az A és C városok távolsága 136 km, ezért a B és C városok távolsága 136 – 64 = 72 km. Az 1:600000 méretarányú térképen 1 cm-nek a valóságban 6 km felel meg, ebből következik, hogy ezen a térképen a **B és C városok távolsága** 72 : 6 = **12 cm.**

Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

EN ISO 9001 : 2000

Levelező Matematika Szakkör ***2021/2022.***

DÖNTŐ

7. OSZTÁLY

1) 13 különböző pozitív egész szám összege 92. Melyek ezek a számok?

   Megoldás:

   Ha az első 13 pozitív számot összeadnánk, akkor $1+2+3+\cdots+13=\frac{13\cdot 14}{2}=91$-et kapnánk. Az eredményt csak úgy növelhetjük eggyel 92-re, hogy a 13-at 14-re cseréljük. (Nagyobb számok esetén az összeg már több lenne 92-nél.) Így a keresett számok: **1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;14**

2) Bizonyítsd be, hogy 7 egész szám között mindig van kettő olyan, amelyek különbsége osztható 6-tal!

   Megoldás:

   A 6-tal való oszthatóság szempontjából az egész számok 6 csoportba sorolhatók, 0;1;2;3;4; vagy 5 maradékot adók. (Ezek az ún. maradékosztályok.) A skatulyaelv szerint a 7 szám között biztosan van legalább kettő, amelyik ugyanabba a csoportba esik. Ekkor az ő különbségük maradéka 0 lesz, tehát osztható lesz 6-tal. Q.e.d.

3) Számítsd ki a következő szorzatot!

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

   Megoldás:

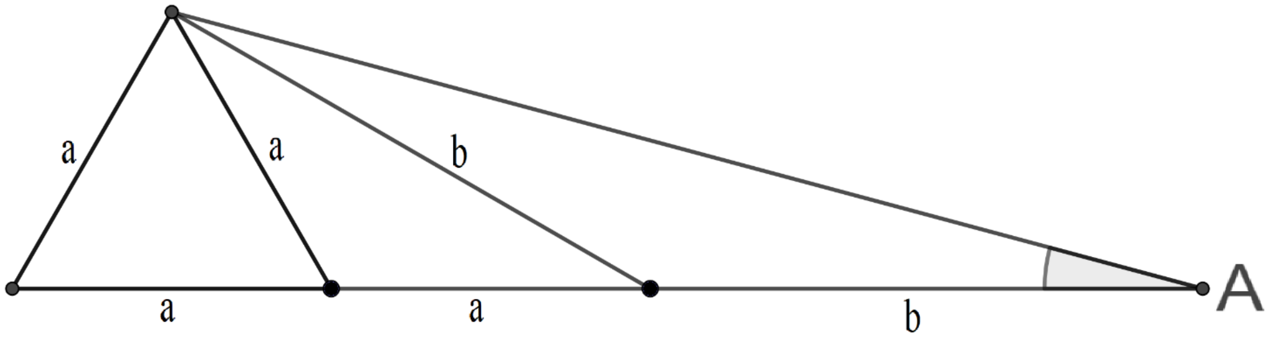
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{100}{100}-\frac{1}{100}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{98}{99}\cdot\frac{99}{100}=$$

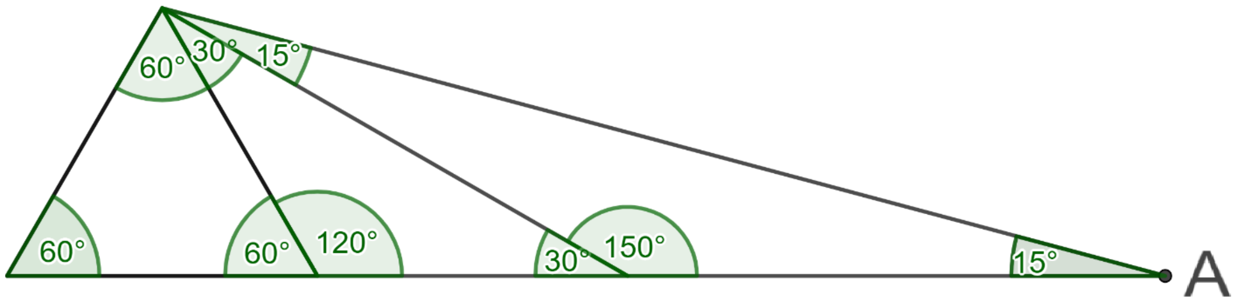
   Mivel ez egy ún. teleszkópikus szorzat, így egyszerűsíthetünk és az eredmény: $\mathbf{\frac{1}{100}}$

4) Mekkora az ábrán az A csúcsnál található szög? (Az azonos betűk azonos hosszúságú szakaszokat jelölnek.)



Megoldás:

Az ábrán szabályos és egyenlőszárú háromszögek találhatók, így a megfelelő szögeket beírva kapjuk, hogy **az A csúcsnál található szög 15^0**.



Boronkay György Műszaki Középiskola és Gimnázium
2600 Vác, Németh László u. 4- 6.
☎: 27- 317 - 077 ☎/fax: 27- 315 - 093
WEB: http://boronkay.vac.hu **e-mail:** boronkay@vac.hu

Levelező Matematika Szakkör **2021/2022.**

DÖNTŐ

8. OSZTÁLY

1) Lehet-e egy kétjegyű szám egyenlő a számjegyei szorzatával?

Megoldás:

A kétjegyű szám számjegyei legyenek a és b. Ekkor a kétjegyű szám a következő alakban írható fel: $10a + b$. A megoldandó egyenlet pedig:

$$10a + b = a \cdot b$$

Ezt rendezve: $10a = a \cdot b - b = b(a - 1)$

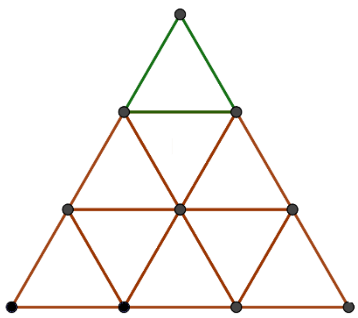
Ebből b-t kifejezve: $b = 10 \cdot \frac{a}{a-1}$

Mivel $\frac{a}{a-1}$ mindig nagyobb 1-nél, így a 10-szerese 10-nél nagyobb, azaz $b > 10$.
Ez viszont nem lehetséges**, így nincs ilyen kétjegyű szám.**

2) Az 1 m oldalhosszúságú szabályos háromszöglapon 10 pontot helyezünk el. Mutassuk ki, hogy van közöttük kettő, melyek távolsága kisebb 34 cm-nél!

Megoldás:

Osszuk fel a szabályos háromszöget az oldalak harmadolópontjain keresztül az oldalaival párhuzamos szakaszokkal. Ekkor 9 db egymással egybevágó szabályos háromszöget kapunk. A skatulyaelv szerint a 10 pontból biztosan lesz 2 olyan, amelyik egy ilyen kisebb háromszögbe kerül. Mivel ezek oldalainak hossza $33\frac{1}{3}$ cm, így a két pont távolsága biztosan kisebb, mint 34 cm. Q.e.d.



3) Számítsd ki a következő szorzatot!

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$

Megoldás:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{9}{9}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{16}{16}-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{10000}{10000}-\frac{1}{10000}\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{15}{16}\cdot\ldots\cdot\frac{9800}{9801}\cdot\frac{9999}{10000}=$$

$$=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{98\cdot 100}{99\cdot 99}\cdot\frac{99\cdot 101}{100\cdot 100}$$

Mivel ez egy ún. teleszkópikus szorzat, így egyszerűsíthetünk, tehát csak az eleje és a vége marad pár nélkül: $\frac{1}{2}\cdot\frac{101}{100}=\mathbf{\frac{101}{200}}$

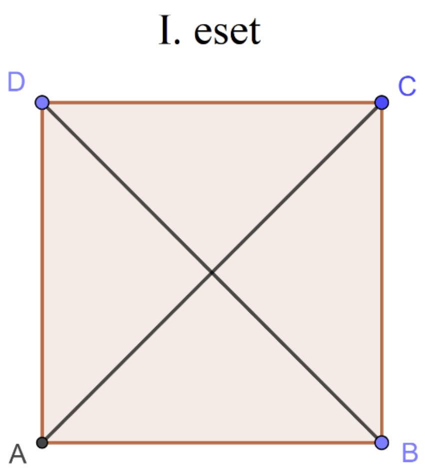
4) Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabb oldalból a rövidebb oldallal egyenlő hosszúságú szakaszt metsz le. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói?

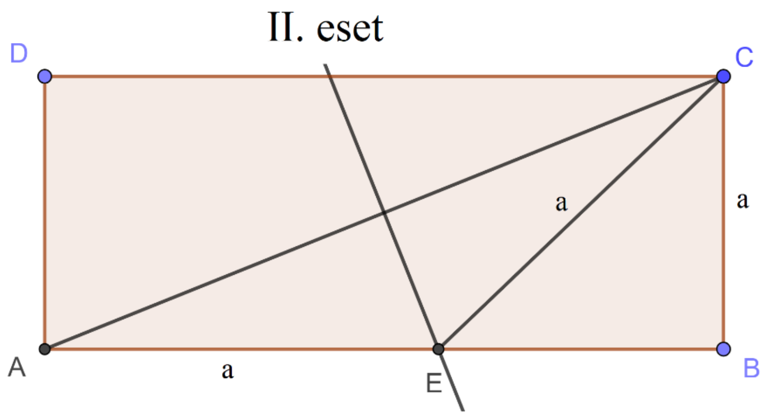
Megoldás:

A feladatnak három lehetséges esete van.

I. Ha a téglalap négyzet, akkor **az átlók 90^0-os szöget zárnak be egymással**.

II. Ha az AE szakasz egyezik meg a rövidebb oldallal, akkor az AEC háromszög egyenlőszárú (hiszen E pont rajta van az AC szakaszfelező merőlegesén), így EC szakasz is ugyanolyan hosszú. Ekkor azonban EBC derékszögű háromszögben az egyik befogó megegyezne az átfogóval, ami nem lehetséges. Így ez az eset nem ad megoldást.





III. Ha a BE szakasz egyezik meg a rövidebb oldallal, akkor az EBC háromszög egyenlőszárú és derékszögű, ezért a hegyesszögei 45^0-osak. Az AEC∡ = 135^0, mivel az előző szög kiegészítő szöge. Az AEC háromszög most is egyenlőszárú (hiszen E pont rajta van az AC szakaszfelező merőlegesén), így EC = AE = x. Az AEC háromszög másik két hegyesszöge tehát $22{,}5^0$. **Ennek pedig éppen a kétszerese lesz az átlók által bezárt szög, azaz 45^0.**