



HALMAZOK

Bevezetés

A halmaz fogalma első megközelítésben bizonyos „sokaságot” vagy „összességet” jelent. A „dolgok összessége” azt fejezi ki, hogy bizonyos dolgokat (ezek lehetnek számok, tárgyak élőlények, növények, állatok stb.) együtt tekintünk és ezeket a halmaz elemeinek nevezzük. Egy bizonyos halmaz elemei között létezhet egy közös tulajdonság (pl. Nekeresd település lakosainak halmaza), viszont lehetnek teljesen eltérő tulajdonságúak is, mint például a következő háromelemű halmaz: {oroslán, gyöngyvirág, borosüveg}. A halmazok elemszámának a vizsgálata is jelentős kihívásokat rejteget a matematika kedvelőinek számára. Léteznek végtelen elemszámú halmazok (például a természetes számok halmaza), illetve véges elemszámúak (például egy adott kiránduláson részt vevő gyerekek halmaza). A továbbiakban olyan feladatokkal foglalkozunk, ahol véges elemszámú halmazok szerepelnek.

Mintapéldák

- 1.) Egy matematikai versenyen két feladatot tűztek ki. Az első feladatot a versenyzők $\frac{7}{10}$ része, a másodikat a versenyzők $\frac{3}{5}$ része oldotta meg. Minden tanuló megoldott legalább egy feladatot, és 9-en mindkét feladatot megoldották. Hányan indultak a versenyen?

Megoldás:

Az összes versenyző $\frac{7}{10} + \frac{3}{5} = \frac{13}{10}$ része oldott meg helyesen legalább egy feladatot. Viszont ez a teljes versenyzői létszám $\frac{13}{10}$ részét jelenti. Vagyis az a 9 tanuló, amely mindkét feladatot megoldotta a versenyzők számának a $\frac{13}{10} - \frac{10}{10} = \frac{3}{10}$ részét képezi. Így a versenyen indulók $\frac{1}{10}$ része $9 : 3 = 3$ tanuló, ezért $3 \cdot 10 = 30$ tanuló vett részt a versenyen.

- 2.) Egy tanyasi kistelepülésen összesen 43 kutya és 37 macska van. Minden portán úgy kutyából, mint macskából legfeljebb egy található. 16 olyan porta van, ahol nincs sem kutya, sem macska. Mennyi lehet a porták száma ezen a településen?

Megoldás:

Induljunk ki abból a helyzetből, amikor minden portán, ahol található egy macska, ott kutya is van, ezért 37 portán van kutya és macska is (mivel a macskák száma 37). Ebben esetben viszont még $43 - 37 = 6$ olyan porta van, ahol csak egy kutya található. Figyelembe véve, hogy 16 portán nem találunk sem kutyát sem macskát, így a településen található porták száma legalább $37 + 6 + 16 = 59$.

A másik szélsőséges helyzet az, amikor egyetlen portán sem található egynél több állat, így 43 portán egy kutya, míg 37 portán egy macska van. Mivel 16 portán nincs sem kutya, sem macska, ezért a településen legfeljebb $43 + 37 + 16 = 96$ porta található.

- 3.) Seholnemtalárod településen az őstermelők sertést, illetve birkát tenyésztnek. A sertéstenyésztők $\frac{3}{10}$ része birkát is tenyészt, míg a birkatenyésztők fele sertéstenyésztéssel is foglalkozik. A településen összesen 126 őstermelő tenyészt sertést és birkát is. Seholnemtalárod lakosságának egy negyed része őstermelő. Hány lakosa van a településnek?

Megoldás:

Mivel a birkatenyésztők fele sertéstenyésztéssel is foglalkozik és a településen összesen 126 őstermelő tenyészt sertést és birkát is, ezért a birkatenyésztők száma $126 \cdot 2 = 252$. Továbbá a 126 őstermelő a sertéstenyésztők $\frac{3}{10}$ részét képezi. Ebből következik, hogy sertéstenyésztők $\frac{1}{10}$ része $126:3 = 42$, tehát Seholnemtalárod településen $42 \cdot 10 = 420$ sertéstermelő él. Tehát az őstermelők száma $420 + 252 - 126 = 546$, ez pedig a település lakosságának egynegyede. Így a településen összesen $546 \cdot 4 = 2184$ lakos él.

- 4.) Egy osztályban ugyanannyi a fiú, mint a lány. A tanulók közül 18 bentlakó és ugyanennyien járnak sportkörre. Az osztály 6 énekkarosa közül csak egy nem bentlakó. A sportkörre járó bentlakók száma 10. A bentlakók közül hárman tagjai a sportkörnek és az énekkarnak is. 10 olyan tanuló van, aki sem sportkörre, sem énekkarra nem jár. Mekkora az osztály létszáma?

Megoldás:

Elsőként próbáljuk megállapítani, hogy a bentlakók közül hányan járnak sportkörre, illetve hányan énekkarosok. A bentlakók közül hárman tagjai a sportkörnek és az énekkarnak is, ezért csak sportkörre $10 - 3 = 7$ bentlakó jár. Mivel a 6 énekkaros közül csak egy nem bentlakó, ezért a bentlakók között 3 olyan van, aki sportkörre is jár, és $5 - 3 = 2$ aki bentlakó és énekkaros, de nem jár sportkörre. Mivel 6 bentlakó nem jár sem szakkörre, sem énekkarra, ezért $10 - 6 = 4$ olyan tanuló van, aki nem bentlakó, nem szakkörös és nem énekkaros. A 6 énekkaros közül egy olyan van, akiről nem tudjuk megállapítani, hogy sportkörös vagy sem. Ugyanígy módon a 18 sportkörösről tudjuk, hogy közülük 3 bentlakó és énekkaros is, 7

bentlakó, de nem énekkaros. Viszont a fennmaradó 8 sportkörös között két lehetőség áll fenn: vagy van egy énekkaros, vagy egyikük sem jár énekkarra.

A fentieket összefoglalva az osztálylétszám kétféle lehet:

$$6 + 3 + 7 + 2 + 1 + 8 + 4 = 31$$

$$6 + 3 + 7 + 2 + 1 + 7 + 4 = 30$$

Viszont tudjuk, hogy az osztályban ugyanannyi a fiú, mint a lány, így az osztálylétszám csak páros lehet. Tehát összesen 30 tanuló jár az osztályba.

Gyakorló feladatok

- 1.) Egy iskolai sportnapon két vetélkedőre lehetett jelentkezni: zsákfutás és kötélhúzás. A zsákfutásra jelentkező tanulók $\frac{3}{4}$ része jelentkezett kötélhúzásra is. A kötélhúzásra jelentkező tanulók $\frac{2}{5}$ része pedig benevezett zsákfutásra is. Összesen 126 tanuló jelentkezett mindkét vetélkedőre.
 - a) Hány tanuló jelentkezett zsákfutásra?
 - b) Hány tanuló jelentkezett kötélhúzásra?
- 2.) Egy osztály tanulói három kirándulást szerveztek. Mindegyik kiránduláson 15-15 tanuló vett részt. Az első kirándulás résztvevői közül 7-en jelen voltak a második, 8-an a harmadik kiránduláson. A második kirándulás 5 résztvevője ment el a harmadik kirándulásra is. Négy olyan tanuló volt, aki mindhárom kiránduláson részt vett. Hány tanuló vett részt legalább egy kiránduláson?
- 3.) Egy kistelepülésen a falunap alkalmával felmérték a lakosok alkohol fogyasztási szokásait. A falunapon alkoholos italokból csak sört és pálinkát árúsítottak. Összesen 100 lakost kérdeztek meg, mindenki fogyasztott alkoholt. Közülük 78-an azt válaszolták, hogy ittak sört, míg 71-en azt, hogy ittak pálinkát. Összesen 48 lakos ivott sört és pálinkát is. A felmérést hibásnak találták. Miért? Válaszunkat indokoljuk!
- 4.) Egy újságíró felmérést készített a Modern Barlanglakók között. Összesen 100 lakost vizsgált meg és a következőket tapasztalta: 70-en barna szeműek, 75-en barna hajúak, 85-en 175 cm-nél magasabbak, 90-en 65 kg-nál nehezebbek, és 95-nek kedvenc étele a fenyőrügy. A megkérdezettek közül legkevesebb hány olyan van, amely mind az öt jellemző tulajdonsággal rendelkezik?

Kitűzött feladatok

- 1.) Egy osztály tanulói állatsimogató kirándulásra mentek a Simogasd Szeretettel Az Állatokat farmra. Itt kétféle állatot lehetett simogatni: kecskét és birkát. Minden tanuló megsimogatott legalább egy állatot. Kecskét 18-an, birkát 24-en simogattak. 16 tanuló csak birkát simogatott.
 - a) Hány tanuló simogatott kecskét és birkát is?
 - b) Hány tanuló akart csak kecskét simogatni?
 - c) Hány fős az osztálylétszám?

- 2.) Egy állatkert összes gondozója között felmérték, hogy hányan kedvelik a gorillákat, illetve a csimpánzokat. A felmérés eredménye alapján a gorillákat kedvelő gondozók $\frac{4}{7}$ része a csimpánzokat is kedveli, míg a csimpánzokat kedvelő gondozók $\frac{2}{5}$ része kedveli a gorillákat is. 12 olyan gondozó van, amely mindkét majomfajtát kedveli. A gondozók közül 14-en egyik majomfajtát sem kedvelik. Hány gondozója van az állatkertnek?

- 3.) Labdátnevtaláljok település focicsapatot szeretne alapítani. A felhívásra sokan megjelentek a falunapi plakátokon meghirdetett toborzón. Amikor Enbélyegy edző megkérdezte a jelenlévőket, hogy kik játszottak már a különböző posztokon, kiderült, hogy korábban 19-en már játszottak védőt, 20-an középpályást, illetve 22-en csatárt (ezek között voltak, akik több posztot is megjelöltek). A további kérdésekből kiderült, hogy 10 fő játszott már védőt és középpályást, 9 fő csatárt és védőt, 11-en csatárt és középpályást, 4-en pedig mindhárom poszton fociztak már. Hányan vettek részt a toborzón, ha Enbélyegy edző elhozta 3 unokaöccsét is, akik még soha semmilyen poszton nem játszottak?

- 4.) A Ne Együnk Sertéshúst mozgalom kirándulást szervezett 35 diák számára. Az első este a vacsorára háromféle salátát szolgáltak fel: kukoricasalátát, gyümölcssalátát és tonhalsalátát. Minden diák rendelt legalább egyfélét a három közül. Kukoricasalátát 14-en, gyümölcssalátát 15-en és tonhalsalátát 13-an rendeltek. Egy diák mindhárom salátából rendelt. A kukoricasalátát rendelők közül 11-en nem kértek gyümölcssalátát. 9 olyan diák volt, aki sem kukoricás, sem gyümölcssalátát nem evett. A csak gyümölcssalátát rendelők eggyel többen voltak, mint a csak tonhalasat rendelők.
 - a) Hány olyan diák volt, aki tonhalas és gyümölcssalátát is rendelt?
 - b) Hány olyan tanuló volt, aki csak kukoricás salátát rendelt?

Beküldési határidő: **2021.02.04.**

Postai cím: Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Dr. Fülöp Zsolt



TÉRGEOMETRIAI FELADATOK

Bevezetés

A geometria a matematikának a pontthalmazok (alakzatok, idomok) vizsgálatával foglalkozó ága. A háromdimenziós idomok (testek) vizsgálata a térgeometria tárgya. A testek osztályozására több szempont létezik. Ha egy test sokszöglapokkal határolt, akkor poliédernek nevezzük. Ezek egyik osztálya a hasábok halmaza. (Ilyen például a téglatest.) Általános iskolai tanulmányaink a hasábok, hengerek, gúlak, kúpok legegyszerűbb fajtáira korlátozódnak. A számítási feladatok ezen testek mennyiségi jellemzői közül a felszín- és térfogatszámításra vonatkoznak. A vizsgált testek közül ezen jellemzők kiszámítására képletek állnak rendelkezésre. Az itt következő feladatoknak nem célja bonyolult számítások végeztetése, inkább fogalomértésre, logikus gondolkodásra próbálnak készíteni. Sok sikert a feladatok megoldásához!

Mintapéldák

- 1.) Hány egybevágó kockát ragasszunk össze oszloppá, ha az eredeti kocka felszínénél ötször nagyobb felszínű testet szeretnénk kapni?

Megoldás:

Egy kockának 6 lapja van, így a keresett test felszínén 30 oldallapja lesz egy kockának. Az oszlop alap- és fedőlapján kívül 28 lap lesz az oldalakon. Egy kocka 4 oldallapot ad az oszlopnak, ezért $28:4 = 7$ kockára van szükség.

- 2.) Fel lehet-e darabolni egy kockát 20 kockára?

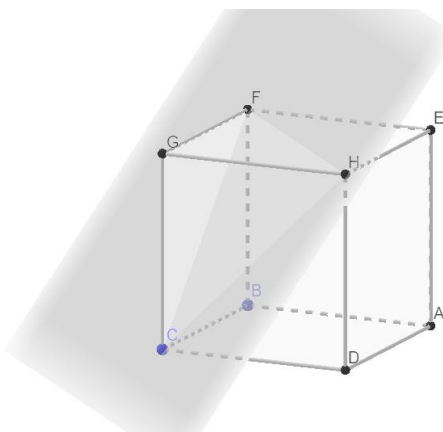
Megoldás:

Egy kockát könnyen feldarabolunk egybevágó kisebb kockákra, így feldarabolhatjuk: $2 * 2 * 2 = 8$, vagy $3 * 3 * 3 = 27$, vagy $4 * 4 * 4 = 64$, ... kockára. Ha egy ilyen felosztást követően kiválasztunk egy $2 * 2 * 2$ -es részt, s ezen 8 kis kockát „összeolvasztjuk”, azaz egy kockának tekintjük (megszüntetjük a köztük levő vágásokat), a kockák száma 7-tel csökken, hiszen 8 kocka megszűnt, és 1 kocka keletkezett. Ezt a műveletet elvégezzük egy $3 * 3 * 3$ -as felosztásnál, így eljutunk a 20 kockára történő felosztáshoz ($27 - 7 = 20$).

- 3.) Lehet-e a kockát egy síkkal úgy metszeni, hogy a síkmetszet szabályos háromszög legyen?

Megoldás:

Válasszuk ki a kocka 3 olyan csúcsát, melyek között nincs kettő, amelyet kockaél köt össze. Ez a 3 pont egy egyenlő oldalú háromszög három csúcsa (mindegyik oldal a kocka egy lapátlója). Erre a 3 pontra illeszkedő sík és a kocka síkmetszete szabályos háromszög lesz.



- 4.) Egy testet 6 nyolcszög, 8 hatszög és 12 négyzet határol. A test minden csúcsából 3 él indul ki. Hány csúcsa van a testnek?

Megoldás:

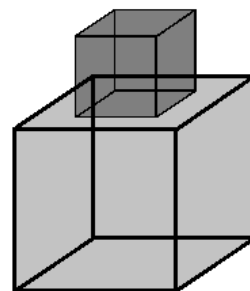
Számoljuk meg a test éleit! A 6 nyolcszög 48 élt ad a testnek, a 8 hatszög és 12 négyzet is 48-48 élt ad, ez összesen 144 él. Azonban minden élt kétszer számoltunk, ezért a testnek 72 éle van. A test éleit másképp is számolhatjuk. Ha a testnek n db csúcsa van és minden csúcsból 3 él indul ki, ez n csúcs esetén $3n$ él, ám minden élt kétszer számolunk, hiszen minden élnek két vége van, akkor az éleinek száma $\frac{3n}{2}$, hiszen. $\frac{3n}{2} = 72$, $n = 48$. A testnek így 48 csúcsa van.

Gyakorló feladatok

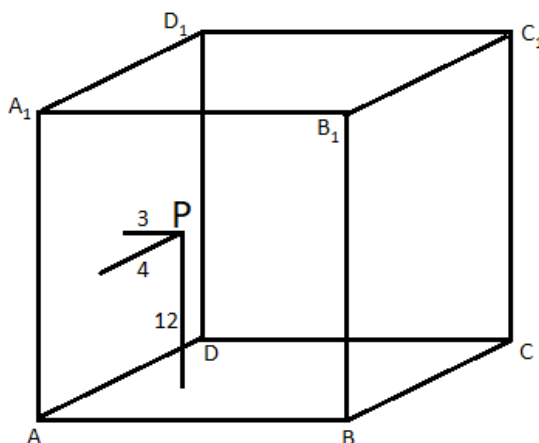
- 1.) Egy kockát két szemközti lapjával párhuzamos síkokkal úgy „szeletelünk fel”, hogy a keletkezett testek felszínének összege háromszorosa legyen a kocka felszínének. Hány síkkal szeleteltük fel a kockát?
- 2.) Fel lehet-e darabolni egy kockát 50 darab kockára?
- 3.) Egy négyzetes oszlop éleinek mérete 3, 3 és 4 egység. Az oszlopot befestettük barnára. Ezután a lapokkal párhuzamos vágásokkal egységkockákra daraboltuk. Hány olyan kiskockát kaptunk, amelynek:
 - a) pontosan 3 lapja barna?
 - b) pontosan 2 lapja barna?
 - c) pontosan 1 lapja barna?
 - d) nincs barna lapja?
- 4.) Egy 2cm élhosszúságú tömör kockának az egyik sarkából kivágunk egy 1cm élhosszúságú kockát.
 - a) A keletkezett testnek hány éle van?
 - b) A keletkezett testnek hány lapja van?
 - c) Hány cm^3 a keletkezett test térfogata?
 - d) Hány cm^2 a keletkezett test felszíne?

Kitűzött feladatok

- 1.) Fel lehet-e darabolni egy kockát 48 kockára?
- 2.) Egy 2cm élhosszúságú tömör kockának az egyik lapjára ráragasztottunk egy 1cm élhosszúságú kockát az ábra szerint.
 - a) A keletkezett testnek hány éle van?
 - b) A keletkezett testnek hány lapja van?
 - c) Hány cm^3 a keletkezett test térfogata?
 - d) Hány cm^2 a keletkezett test felszíne?



- 3.) Lehet-e a kockát egy síkkal úgy metszeni, hogy a síkmetszet szabályos hatszög legyen?
- 4.) Az $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ kocka belsejében egy P pont az $ABCD$ laptól 12, az $ABB_1 A_1$ laptól 4, az $ADD_1 A_1$ laptól 3 egység távolságra van. Milyen messze van P az A csúcstól?



Beküldési határidő:

2021. 02. 04.

Postai cím:

Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Központ
2600 Vác, Németh L. u. 4-6.

A feladatsort összeállította:
Merényi Imre